P2 : Applications des bases de la dynamique **email : diagnensis@yahoo.fr**

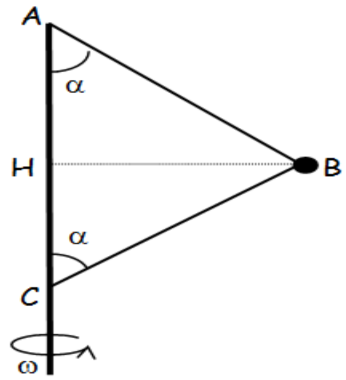
EXERCICE 1

Sur un banc à coussin d'air, on étudie le mouvement rectiligne d'un mobile. Le banc est incliné de $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Les forces de frottement sont négligeables.
La masse du mobile est m = 25 g. Avec un dispositif approprié, on mesure la vitesse instantanée v du mobile, en fonction de la distance x parcourue. On obtient les résultats suivants :

x(m)	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
v($m.s^{-1}$)	0	0,58	0,82	1,00	1,17	1,30	1,41	1,55
$v^2(m^2.s^{-2})$	0	0,33	0,67	1,00	1,37	1,69	2,00	2,40

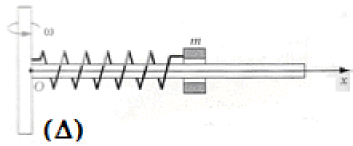
1) Tracer une représentation graphique de $v^2 = f(x)$.
<u>Échelles</u> : absc. : 1 cm pour 0,10 m ; ord. : 5 cm pour 1,00 $m^2.s^{-2}$.
2) En déduire la nature du mouvement et déterminer graphiquement l'accélération a du mouvement.
En appliquant le théorème du centre d'inertie, faire une étude théorique du mouvement et déterminer par le calcul la valeur de l'accélération

Exercice2 : On donne : r = CH = 40 cm ; l = AB = BC = 1 m



Une petite bille B assimilable à un point matériel de masse m = 100 g, est reliée par deux fils de masses négligeables à deux points A et C d'un axe vertical D en rotation à la vitesse ω constante.
1) Pour une vitesse ω constante les fils AB et CB restent constamment tendus.
<u>1.a</u> - Calculer l'angle α.
<u>1.b</u>- Calculer les intensités des tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_C$ des fils en fonction de ω.
2) Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une vitesse angulaire ω_0 que l'on calculera.

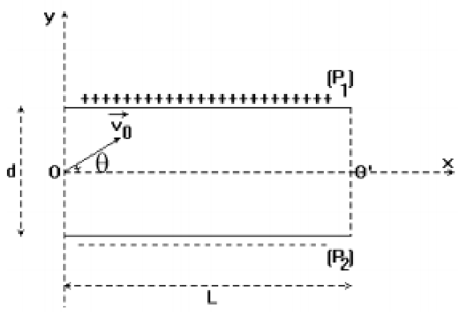
EXERCICE 3



Un solide S de masse m = 50 g peut glisser sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, fixée à un axe vertical (Δ). Ce solide est fixé à une extrémité d'un ressort de même axe que la tige comme le montre la figure ci-contre. La longueur du ressort détendu est l_0 = 20 cm. Sa constante de raideur vaut k = 50 $N.m^{-1}$. Quand l'ensemble tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire ω la longueur du ressort devient l.
1) Établir la relation entre ω et l.
2) Pour quelle valeur de ω la longueur du ressort prend la valeur l= 25 cm ?

Exercice 4 :

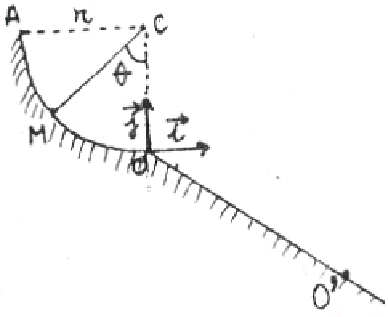
Charge élémentaire : e= $1,6.10^{-19}$ C ; Masse de la particule α : m=$6,64.10^{-27}$kg.
Un faisceau de particule α (ion He^{2+}) pénètre entre les plaques horizontales P_1 et P_2 d'un condensateur à la vitesse de valeur v_0=448km.s^{-1} dont la direction fait un angle θ=45° avec l'horizontale.
La largeur de la plaque est L = 10 cm ; La distance entre les armatures est d = 8 cm ; la tension entre les armatures est U> 0 .



1- Etablir les équations horaires du mouvement, d'une particule α entre les armatures du condensateur, en fonction des paramètres du problème
2- Etablir l'équation de la trajectoire d'une particule α entre les armatures du condensateur.
3- Déterminer la valeur de U pour que le faisceau sorte des armatures au point O'.
4- Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_0$ des particules α à la sortie au point O'.

Exercice 5 : Données : g = 10 $m.s^{-2}$; m = 10 grammes
On dispose d'un rail AO dont la forme est celle d'un quart de cercle de rayon r = 1,0 mètres, conformément à la figure ci-contre.
Un point matériel de masse m, abandonné sans vitesse initiale, glisse sur le rail sans frottement.

En O est fixé un plan incliné vers le bas de 45°. Le point matériel quittant le rail en O décrit une trajectoire qui rencontre le plan incliné en un point O'.



1) On repère la position du point matériel par l'angle θ. Exprimer $\|\vec{V}_M\|$, norme de la vitesse du point matériel en M en fonction de θ , r et g.

2) Exprimer en fonction de θ, g et m l'intensité de la force $\vec{R}$ que le rail exerce sur le point matériel. En quel point cette intensité est-elle maximale ? La calculer.

3) Après avoir déterminé les caractéristiques de la vitesse $\vec{V}_0$ au point O, déterminer l'équation de la trajectoire du point matériel entre O et O', point de contact avec le plan incliné dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Exprimer la distance OO' en fonction de V_O et g et la calculer.

5) En réalité, la force de frottement agissant tangentiellement entre A et O n'est pas négligeable. Ainsi, l'expérience donne OO'= 4,7 mètres.

Evaluer, alors, l'intensité de la force f responsable de l'écart entre la valeur expérimentale et la valeur théorique de OO'.

EXERCICE 6 **(04 points)**

3.1. Un canon lance un projectile de masse m, supposé ponctuel, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale à partir d'un point M_0 situé à la hauteur H au-dessus du niveau de la mer. Le mouvement du projectile est étudié dans le repère (OX,OY) de plan vertical, d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (figure 2). L'axe horizontal OX est pris sur le niveau de la mer.

Dans toute la suite on néglige l'action de l'air.

3.1.1. Faire le bilan des forces appliquées au projectile puis déterminer les composantes de l'accélération du mouvement. **(0,5 pt)**

3.1.2. En déduire les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ du projectile et celles du vecteur position $\vec{OM}$ à chaque instant en fonction v_0, g et H. **(0,5 pt)**

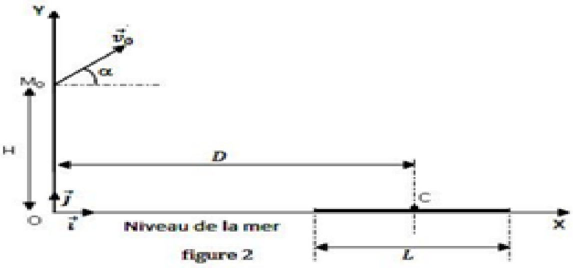


figure 2

3.1.3. Le projectile tombe en un point C centre d'un bateau tel que OC = D.

a) Trouver l'expression du temps de vol t_1 mis par le projectile pour atteindre le point C en fonction de D, v_0 et α. **(0,25 pt)**

b) Donner, en fonction de α, g, H et D, l'expression de v_0 pour qu'il tombe effectivement au point C. Faire l'application numérique. **(0,25 pt)**

c) Etablir l'expression de la hauteur maximale h_m atteinte par le projectile par rapport au niveau de la mer en fonction de D, H et α. **(0,5 pt)**

3.2. Le projectile est maintenant lancé à partir du point O origine du repère avec un vecteur- vitesse $\vec{V}_0'$. Le bateau a une longueur L et de même direction que OX.

Le projectile tombe à une distance $d_1 = \frac{L}{2}$ en deçà de la cible C quand le vecteur vitesse $\vec{V}_0'$ fait un angle α_1 avec l'horizontale. Il tombe à une distance $d_2 = \frac{L}{2}$ au-delà de la cible C quand $\vec{V}_0'$ fait un angle α_2 avec l'horizontale. Le bateau est supposé immobile pendant toute la durée des tirs.

3.2.1. Exprimer la distance d_1 puis d_2 en fonction de D, g, v_0' et l'angle de tir (α_1 ou α_2). **(0,75 pt)**

3.2.2. En déduire la relation $D = \frac{v_0'^2(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)}{2g}$ **(0,5 pt)**

3.2.3. Déterminer en fonction de α_1 et α_2 l'angle θ pour que le projectile atteigne la cible puis calculer sa valeur. **(0,75 pt)**

On donne : g = 10 m.s^{-2}; H = 80 m ; D =1km et α = 30° ; α_1 = 30° et α_2 = 45°

(Bac S1 2015) :

EXERCICE 7

Dans beaucoup de moteurs, pour diminuer l'usure des pièces mécaniques, on utilise des huiles dont l'une des caractéristiques fondamentales est la viscosité.

Dans ce qui suit, on se propose de déterminer la viscosité d'une « huile moteur ». Pour cela, on étudie la chute verticale d'une bille en acier d'abord dans l'air puis dans l'huile. Dans les deux cas, la bille est lâchée sans vitesse initiale à partir d'un point O du fluide pris comme origine de l'axe (OX) vertical et orienté vers le bas et l'instant de lâcher est pris comme origine des dates t = 0.
Sur la bille s'exercent les trois forces suivantes :

- Son poids $\vec{p}$;
- La résistance $\vec{f}$ du fluide, qui est une force colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse instantanée de la bille, d'intensité $f = 6\,\pi\,\eta\,r\,V$, expression où η est la viscosité du fluide supposée constante, V la valeur de la vitesse instantanée de la bille et r son rayon ;
- La poussée d'Archimède $\vec{F}$ qui est une force verticale orientée vers le haut, d'intensité $F = \rho V_B g$ relation où ρ est la masse volumique du fluide, V_B le volume de la bille et g l'intensité de la pesanteur.

3.1 Etude du mouvement de la bille dans l'air.

3.1.1. Représenter les forces appliquées à la bille à une date t > 0. **(0,25 point)**

3.1.2. Calculer l'intensité de chacune de ces forces pour V = 5 m/s. En déduire qu'on peut négliger les intensités de $\vec{F}$ et $\vec{f}$ devant celle du poids. **(0,5 point)**

3.1.3. Etablir les équations horaires de la vitesse V(t) et de l'abscisse x (t) de la bille puis préciser la nature du mouvement de la bille dans l'air. **(0,5 point)**

3.1.4. Au bout d'un parcours de 50 cm depuis le point O, la bille acquiert une vitesse de 3,16 m/s. Montrer que cette information confirme l'approximation faite à la question 3.1.2.**(0,5 point).**

3.2. Etude du mouvement de la bille dans l'huile

3.2.1. Les intensités de $\vec{F}$ et $\vec{f}$ ne sont plus négligeables devant celle du poids.
Par application du théorème du centre d'inertie, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la bille peut s'écrire sous la forme : $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = C$ où C et τ sont des constantes. **(0,5 point)**

3.2.2. Donner l'expression de C en fonction de g, ρ_{ac} (masse volumique de l'acier) et ρ_h (masse volumique de « l'huile moteur ») puis exprimer τ en fonction de ρ_{ac}, r et η (viscosité de l'huile moteur). Vérifier que C = 8,4 m.s^{-2}. **(0,75 point)**

3.2.3. Au bout d'un temps suffisamment long, l'accélération de la bille s'annule. La vitesse obtenue à partir de cet instant est appelée vitesse limite de module $V_{\ell im}$

a) Décrire la nature du mouvement de la bille après que l'accélération s'annule puis exprimer la vitesse limite $V_{\ell im}$ en fonction de τ et C. **(0,5 point)**

b) On trouve expérimentalement que $V_{\ell im}$ = 4,2 cm/s. Quelle valeur de τ peut-on en déduire ? **(0,5 point)**

3.2.4. Déterminer la valeur de la viscosité η de « l'huile-moteur ». **(0,5 point)**

Données :
Masse volumique de l'acier : $\rho_{ac} = 7{,}8 \times 10^3$ kg/m^3 ; masse volumique de l'air : $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3
Masse volumique de l'huile moteur : $\rho_h = 1{,}26.\ 10^3$ kg/m^3 ; viscosité de l'air : $\eta(air)$ =1,85.10^{-5} SI
Rayon de la bille r = 1,5 mm : Volume de la bille $V_B = \frac{4}{3}\pi r^3$; g = 10 N/kg

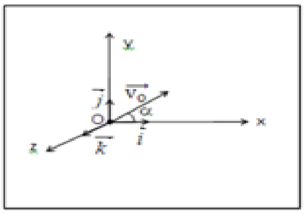
EXERCICE 8

La balistique est une science qui étudie le mouvement des projectiles. Les applications sont très nombreuses dans des domaines aussi variés que le sport, la balistique judiciaire ou les activités militaires.

On étudie le mouvement d'un projectile ponctuel de masse m, lancé par un canon dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ d'intensité g = 10.m s^{-2}.

A un instant $t_0 = 0$, le projectile sort du canon en un point O avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale.

On suppose, que l'action de l'air est négligeable. Le point O est au niveau du sol. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



3.1. Enoncer la deuxième loi de Newton ou théorème du centre d'inertie. **(0,25 pt)**

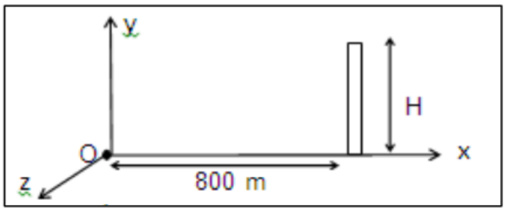
3.2. Déterminer la direction, le sens et la norme du vecteur-accélération du projectile. **(0,75 pt)**

3.3. Montrer que le mouvement du projectile est plan. **(0,5 pt)**

3.4. Etablir l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. **(0,5 pt)**

3.5 La vitesse de sortie du projectile, du canon, est de 100 m.s^{-1}. La vitesse initiale fait l'angle α = 30° avec l'axe OX. Le projectile peut-il atteindre un oiseau perché au sommet d'un édifice se trouvant à 800 m du point O, sur l'axe OX? Justifier la réponse par le calcul. La hauteur de l'édifice est de H = 20 m. **(01 pt)**

3.6 Aucours d'un entrainement au tir, plusieurs essais sont effectués. Le projectile sort à chaque fois du canon en un point O pris au sol avec une vitesse $\vec{v}_0$ de valeur 100 m.s^{-1} ; mais l'angle de tir α varie. Pour protéger les personnes et les biens, on demande d'édifier une zone de sureté autour du point de lancement O. Un mur de protection doit entourer la zone d'impact des projectiles. Le pourtour de ce mur est un « cercle » de centre O et de rayon égal à 1,1 D ; la distance D étant la portée maximale du tir.



3.6.1 Etablir l'expression de la portée du tir en fonction de g , v_0 et α . **(0,25 pt)**

3.6.2 En déduire la valeur de la portée maximale. **(0,25 pt)**

3.6.3 Calculer le rayon du champ de tir. **(0,5 pt)**

EXERCICE 9

On donne g = 10.m.s^{-2} : on néglige les frottements.

Un projectile ponctuel, servant de cible à un tireur, est lancé du point O, à l'instant $t_0 = 0$. La masse du projectile est $m_1 = 100$ g ; sa vitesse initiale $V_{1,0}$ vaut 30 m.s^{-1} et fait un angle α = 30° avec l'horizontale.

Un tireur, situé au point A, à 45 m du point O, envoie avec un fusil, suivant la verticale ascendante, une balle ponctuelle de masse $m_2 = 20$ g, avec une vitesse initiale $V_{2,0} = 500$ m.s^{-1}.

La balle touche la cible au point M. (figure 1)

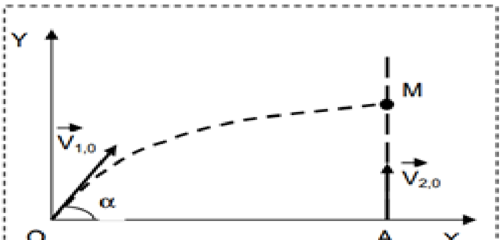


figure 1

3.1 Etablir les équations horaires du mouvement du projectile. **(0,75 pt)**

3.2 Calculer le " temps de vol " du projectile : c'est-à-dire la durée de son mouvement depuis le point O jusqu'au point M de rencontre avec la balle. **(0,75 pt)**

3.3 En déduire l'altitude du point M de rencontre entre le projectile et la balle. **(0,75 pt)**

3.4 Calculer la vitesse V_B de la balle à l'instant de son impact avec la cible. **(0,75 pt)**

3.5 En déduire le " temps de vol " de la balle : durée de son mouvement depuis le point de tir jusqu'à la rencontre avec le projectile. **(0,5 pt)**

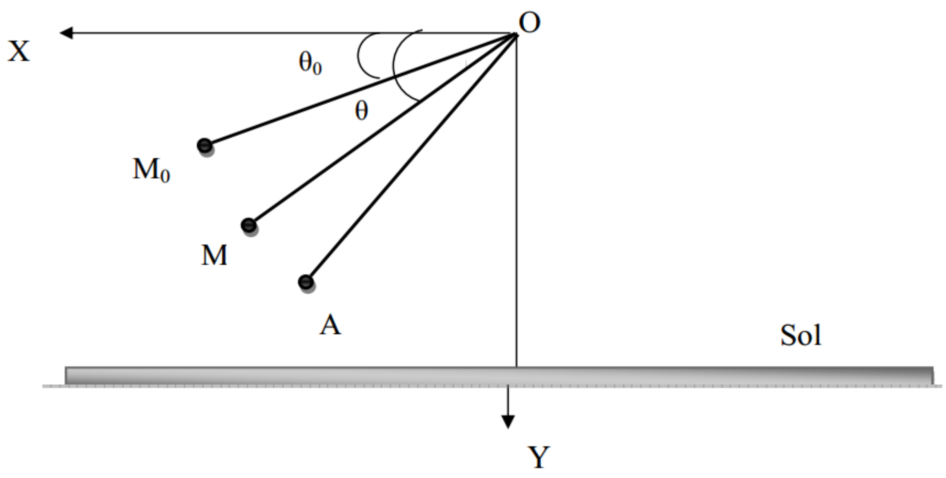
3.6 Comparer les deux " temps de vol " et expliquer pourquoi le tireur peut viser directement la cible. **(0,5 pt)**

EXERCICE 10

Depuis Galilée, les pendules pesants ont été l'objet d'études approfondies, car ils ont constitué du XIX[e] au XX[e] siècle, l'organe essentiel des horloges de précision.
Un pendule pesant est constitué d'un solide pouvant osciller autour d'un axe fixe, de part et d'autre de sa position de repos, sous l'action de son poids. La balançoire, le porte-clés, le balancier d'une horloge en constituent des exemples.
Un modèle simplifié du pendule pesant est le pendule simple. Celui-ci est constitué d'un solide ponctuel suspendu en un point par un fil inextensible de longueur très supérieure à la dimension du solide.

On étudie le mouvement d'un pendule simple constitué d'une bille ponctuelle de masse m = 50 g suspendue en un point fixe O par un fil inextensible de longueur ℓ = 50 cm.
Initialement le pendule est en équilibre stable, le fil est alors vertical et le solide est en dessous de O.
Dans toute la suite les frottements seront négligés.
3.1 Dans un premier temps, le solide est écarté légèrement de sa position d'équilibre stable puis abandonné sans vitesse initiale. Le système effectue alors de part et d'autre de cette position d'équilibre, des oscillations périodiques, de faibles amplitudes, de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Evaluer la période de ces oscillations. Quelle devrait être la valeur de la longueur du fil pour que le pendule « batte la seconde » (une demi-oscillation dure 1 seconde)? On prendra g = 9,8 m.s^{-2}. **(0,5 pt)**

3.2 On écarte maintenant le fil du pendule de sa position d'équilibre jusqu'à la position définie par l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_0})$ = 15°.(voir fig ci-dessous) et on lance la bille da ns le plan XOY avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$ dirigé vers le bas et tangent au cercle de rayon ℓ et de centre O. On repère la position de la bille à un instant t par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.



3.2.1 Par application du théorème de l'énergie cinétique établir l'expression de la vitesse de la bille en M en fonction de v_0, g, ℓ, θ et θ_0. **(0,5 pt)**
3.2.2 En utilisant le théorème du centre d'inertie au point M ; établir l'expression de la tension T du fil en M en fonction de v_0, ℓ, θ_0, θ, g et m. **(0,75 pt)**
3.2.3 Exprimer la valeur minimale V_{0m} de la vitesse V_0 pour que la bille effectue un tour complet le fil restant tendu et la calculer. **(0,5 pt)**
3-2.4 Le pendule est à nouveau lancé à partir de M_0 avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}'$ dirigé vers le bas, tangent au cercle de rayon ℓ et de centre O, de valeur V'_0 = 4,15 m.s^{-1}. Mais le fil se casse quand la bille passe pour la première fois au point A repéré par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA})$ = 45°.

3-2.4-1 Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}_A$ de la bille au point A. **(0,5 pt)**

3-2.4-2 Déterminer, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$ donné dans le schéma précédent, les équations horaires du mouvement de la bille après sa libération. **(0,75 pt)**

3-2.4-3 En posant u = $\ell\cos\alpha - x$, montrer que, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$, l'équation de la trajectoire de la bille après sa libération s'écrit : $y = \dfrac{g}{2v_A^2\sin^2\alpha}u^2 + \dfrac{u}{\tan\alpha} + \ell\sin\alpha$. **(0,5 pt)**

3-2.4-4 Déterminer l'abscisse du point d'impact I de la bille sur le sol horizontal qui se trouve à une distance h = 1,5 m au dessous du point O. **(0,5 pt)**

EXERCICE 11

Des élèves se fixent comme objectif d'appliquer leurs connaissances en mécanique au « jeu de plongeon ». Ce jeu, réalisé à la piscine, consiste à passer au dessus d'une corde puis atteindre la surface de l'eau en un point le plus éloigné possible du point de départ avant de commencer la nage. Le bassin d'eau a pour longueur L = 20 m et est suffisamment profond. Le plongeur doit quitter un tremplin ; à ce moment son centre d'inertie G est à une hauteur h_1 = 1,5 m au dessus de la surface de l'eau. La corde, tendue horizontalement, est attachée à une distance ℓ = 1,6 m du tremplin. Elle est à une hauteur h_2 = 2 m du niveau de l'eau (voir figure à la page suivante).

Au cours d'une simulation, les élèves font plusieurs essais en lançant, avec un dispositif approprié, un solide ponctuel à partir du point G. Les essais diffèrent par la valeur du vecteur-vitesse initial du solide ou par l'angle dudit vecteur avec l'horizontale.

Le mouvement du solide est étudié dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Le point O est le point d'intersection entre la verticale passant par la position initiale de G et la surface de l'eau. La direction de l'axe $\vec{i}$ est perpendiculaire au plan vertical contenant la corde, comme indiqué sur la figure.

On néglige les frottements et on prendra g = 10 m.s^{-2}.

3.1 Lors d'un premier essai, le solide est lancé du point G, à la date t = 0, avec une vitesse $\vec{V}_0$ faisant un angle α = 45° avec l'horizontale, de valeur V_0 = 8 m.s^{-1} et appartenant au plan vertical défini par ($\vec{i}$, $\vec{k}$).

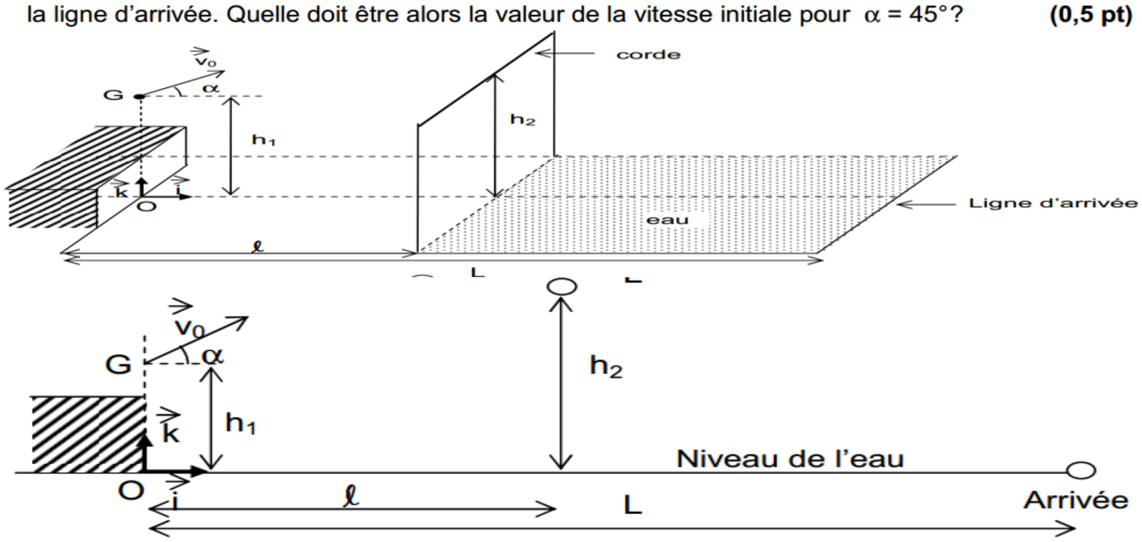
3.1.1 Etablir les équations paramétriques du mouvement du solide. En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire. **(01 pt)**

3.1.2 Le solide passe-t-il au dessus de la corde ? Justifier la réponse. **(0,75 pt)**

3.1.3 Au cas où le solide passe au-dessus de la corde, quelle distance le sépare-t-il de la ligne d'arrivée lorsqu'il touche l'eau ? **(0,75 pt)**

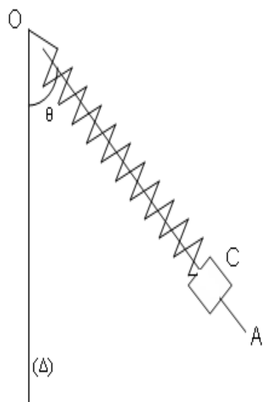
3.1.4 Calculer la norme du vecteur vitesse et l'angle β que ce vecteur forme avec la verticale descendante lorsque le solide touche l'eau. **(01 pt)**

3.2 Dans un second essai, les élèves voudraient que le solide touche l'eau en un point distant de 8 m de la ligne d'arrivée. Quelle doit être alors la valeur de la vitesse initiale pour α = 45°? **(0,5 pt)**



Exercice12

On dispose d'un ressort à spires non jointives de longueur au repos l_0 et de constante de raideur K. On négligera la masse du ressort dans tout l'exercice. On enfile ce ressort sur une tige OA, soudé en O à un axe vertical (Δ) et est incliné obliquement par rapport à la verticale d'un angle θ. Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre, on accroche un corps C de masse m coulissant sans frottement sur OA.



1.1) Le système est au repos. Préciser les différentes forces appliquées à C.

Exprimer l'allongement Δl_1 du ressort, la valeur de la réaction $\vec{R}_1$ exercée par la tige sur C ainsi que la valeur de la tension $\vec{T}_1$ du ressort.

Applications Numériques: l_0= 15cm ; K= 20N.m^{-1} ; θ= 33° ; m= 150g ; g= 9, 8m.s^{-2}.

1.2) L'ensemble tourne autour de Δ à la vitesse angulaire ω constante ; le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l_2. Préciser la trajectoire décrite par C et exprimer la longueur l_2 du ressort.

La calculer pour ω= 6rad.$^{-1}$.

Exprimer littéralement la valeur de la réaction R_2 exercée par la tige sur C en fonction de m, g, ω, θ et l_2. La calculer pour ω= 6rad.s^{-1}.

1.3) Montrer que pour une valeur particulière ω_0 de la vitesse angulaire que l'on précisera, la réaction exercée par la tige sur C a une valeur nulle.

CORRIGE

Exercice6

3.1.1 Système : projectile ; Référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : $\vec{P}$ poids du projectile.

Thèoreme du centre d'inertie : $\vec{P} = m.\vec{a}$ or $\vec{P} = m.\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

3.1.2 Les composantes de la vitesse : $\vec{V}\begin{cases} V_x = V_0.\cos\alpha \\ V_y = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{cases}$

Les composantes du vecteur position : $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0.\cos\alpha.t \\ y = -\frac{g}{2}.t^2 + V_0.\sin\alpha.t + H \end{cases}$

3.1.3

a) Expression du temps de vol t_1 : au point C on a $x = D \Rightarrow D = V_0.\cos\alpha.t_1 \Rightarrow \mathbf{t_1 = \frac{D}{V_0\cos\alpha}}$

b) Expression de V_0 : au point C on a x = D et Y = 0

$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos\alpha^2}x^2 + x.\tan\alpha + H \Rightarrow -\frac{g}{2V_0^2\cos\alpha^2}D^2 + D.\tan\alpha + H = 0 \Rightarrow V_0^2 = \frac{g}{2\cos\alpha^2(D\tan\alpha+H)}D^2$

$V_0 = D * \sqrt{\frac{g}{2\cos\alpha^2(D\tan\alpha+H)}}$ A.N: $V_0 = 101 m.s^{-1}$.

c) Expression de h_m : si $h = h_m$ on a $V_y = 0 \Rightarrow -g.t + V_0.\sin\alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$

$y = -\frac{g}{2}.t^2 + V_0.\sin\alpha.t + H \Rightarrow h_m = -\frac{g}{2}.(\frac{V_0.\sin\alpha}{g})^2 + V_0.\sin\alpha.\frac{V_0.\sin\alpha}{g} + H = \frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2.g} + H$

or $V_0^2 = \frac{g}{2\cos^2\alpha(D\tan\alpha+H)}D^2 \Rightarrow$ on tire : $\mathbf{h_m = \frac{D^2\tan^2\alpha}{4(D\tan\alpha+H)} + H}$

3.2.1 Expressions de d_1 et d_2 : $y = -\frac{g}{2V_0^2\cos\alpha^2}x^2 + x.\tan\alpha$

Au sol : $y = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2V_0^2\cos\alpha^2}x^2 + x.\tan\alpha \Rightarrow x = \frac{V_0^2\sin2\alpha}{g} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{V_0^2\sin2\alpha_1}{g} \\ x_2 = \frac{V_0^2\sin2\alpha_2}{g} \end{cases}$

$$x_1 = D - \frac{L}{2} = D - d_1 \Rightarrow d_1 = D - x_1 \Rightarrow \mathbf{d_1 = D - \frac{V_0^2.\sin2\alpha_1}{g}}$$

$$x_2 = D + \frac{L}{2} = D + d_2 \Rightarrow d_2 = x_2 - D \Rightarrow \mathbf{d_2 = \frac{V_0^2.\sin2\alpha_2}{g} - D}$$

3.2.2 Déduction de la relation : $D = \frac{v_0^2(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)}{2g}$

$d_1 = D - \frac{V_0^2.\sin2\alpha_1}{g}$ et $d_2 = \frac{V_0^2.\sin2\alpha_2}{g} - D \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{V_0^2.\sin2\alpha_2}{g} - D - D + \frac{V_0^2.\sin2\alpha_1}{g}$

or $d_2 = d_1 \Rightarrow \frac{V_0^2.\sin2\alpha_2}{g} - 2D + \frac{V_0^2.\sin2\alpha_1}{g} = 0 \Rightarrow 2D = \frac{V_0^2}{g}(\sin2\alpha_1 + \sin2\alpha_2)$

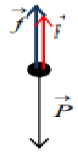
$$\Rightarrow \mathbf{D = \frac{V_0^2}{2g}(\sin2\alpha_1 + \sin2\alpha_2)}$$

3.2.3. L'angle θ :

La portée est donnée par : $x_{sol} = \frac{V_0^2\sin2\theta}{g} = D \Rightarrow \sin2\theta = \frac{g}{V_0^2} * D = \frac{g}{V_0^2} * \frac{V_0^2}{2g}(\sin2\alpha_1 + \sin2\alpha_2)$

$\Rightarrow \sin2\theta = \frac{\sin2\alpha_1 + \sin2\alpha_2}{2}$ A.N: $2\theta = 69° \Rightarrow \mathbf{\theta = 34.5°}$

Exercice7 :



3.1. Etude du mouvement de la bille dans l'air :

3.1.1. Représentation des forces : schéma ci-contre

3.1.2. Calcul des intensités des forces :

$$P = mg = \rho_{ac} V_B g = \rho_{ac} \frac{4\pi . r^3}{3} g = 7{,}8.10^3 . \frac{4.\pi.(1{,}5.10^{-3})^3}{3} .10 = 1{,}1.10^{-3}\, N$$

$$F = \rho_0 V_B g = \rho_0 \frac{4\pi . r^3}{3} g = 1{,}3 . \frac{4.\pi.(1{,}5.10^{-3})^3}{3} .10 = 1{,}83.10^{-7}\, N$$

$$f = 6\pi\eta_{(air)} . r V = 6.\pi.1{,}85.10^{-5}.1{,}5.10^{-3}.5 = 2{,}61.10^{-6}\, N$$

d'où $F \ll P$ et $f \ll P$ on peut négliger les intensités de ces forces devant celle du poids.

3.1.3. Equations horaires x(t) et v(t) :

$$T.C.I. \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = cste \; MRUV : \begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} \\ x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t + x_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_x = gt \\ x = \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 10t \\ x = 5t^2 \end{cases}$$

le mouvement est rectiligne de direction verticale et uniformément accéléré.

3.1.4. Montrons les informations données confirment l'approximation en 3.1.2 :

$$MRUV : 2a_x (x - 0) = V^2 - 0 \Rightarrow a_x = \frac{v^2}{2x} = \frac{3{,}16^2}{2.0.5} = 9{,}986 \approx 10 m.s^{-2}$$

$a_x \approx g \Rightarrow \vec{a} \approx \vec{g} \Rightarrow m\vec{a} \approx m\vec{g} \Rightarrow \vec{P} \approx m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} \approx \vec{P}$ Toutes les forces autres que le poids ont été négligées.

3.2. Etude du mouvement dans l'huile

3.2.1. Montrons que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = C$

$T.C.I : \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}$ Projetons suivant l'axe ox : $P - F - f = m.a_x \Rightarrow mg - \rho_h V_B g - 6\pi\eta . r.V = m\frac{dV}{dt}$

$$\rho_{ac} V_B . g - \rho_h V_B g - 6\pi\eta . r.V = \rho_{ac} V_B \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{\rho_{ac}\frac{4\pi . r^3}{3}} . V = \frac{(\rho_{ac} - \rho_h)\frac{4\pi . r^3}{3} . g}{\rho_{ac}\frac{4\pi . r^3}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_{ac} r^2} V = (1 - \frac{\rho_h}{\rho_{ac}}) g$$

3.2.2. L'expression des constantes C et τ :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = C \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_{ac} r^2} V = (1 - \frac{\rho_h}{\rho_{ac}}) g$$

Par identification $C = (1 - \frac{\rho_h}{\rho_{ac}}) g$ et $\tau = \frac{2\rho_{ac} r^2}{9\eta}$ $AN : \; C = 8{,}4 m.s^{-2}$

3.2.3. a) Nature du mouvement si a=0 : le mouvement sera rectiligne uniforme car la vitesse est maintenant constante et que la trajectoire est rectiligne.

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = C \;\; si \;\; a = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tau} V = C \Rightarrow \; V_{lim} = C.\tau$$

b) Déduction de τ : $\tau = \frac{V_{lim}}{C}$ $\quad A.N \;\; \tau = \frac{4{,}2.10^{-2}}{8{,}4} = 0{,}5.10^{-2} s \qquad \tau = 0{,}5.10^{-2} s$

3.2.4. Détermination de la valeur de la viscosité :

$$\tau = \frac{2\rho_{ac} r^2}{9\eta} \Rightarrow \eta = \frac{2\rho_{ac} r^2}{9\tau} \quad A.N : \; \eta = \frac{2.7{,}8.10^3.(1{,}5.10^{-3})^2}{9.0{,}5.10^{-2}} = 7{,}8.10^{-1}$$

Exercice8

3.1. Enoncer du théorème du centre d'inertie : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse m est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie : $\sum \vec{F}(exterieures) = m.\vec{a}_G$.

3.2. Caractéristiques du vecteur-accélération :
On considère le projectile comme système et on rapporte le mouvement au référentiel terrestre supposé galiléen. L'action de l'air étant négligée, le projectile n'est soumis qu'à son poids.

T.C.I $\sum \vec{F}(exterieures) = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a} \Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ $\quad \vec{a}\begin{cases} direction : verticale \\ sens : orienté\ vers\ le bas \\ norme : a = g = 10\,m.s^{-2} \end{cases}$

3.3. Montrons que le mouvement est plan :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{OM}\begin{cases} x = V_0 \cos\alpha.t \\ y = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0 \sin\alpha.t \\ z = 0 \end{cases}$$

x et y varient au cours du temps alors que z = o quelque soit la date t : le mouvement du projectile est plan et s'effectue dans le plan (xOy).

3.4. Equation cartésienne de la trajectoire : $x = V_0 \cos\alpha.t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0 \sin\alpha.t$

en remplaçant t dans l'expression de y on obtient : $y = -\frac{g}{2.V_0^2 \cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha$

3.5. Ordonnée du projectile pour x_0 =800 m : $y_0 = -\frac{g}{2.V_0^2 \cos^2\alpha}.x_0^2 + x_0.\tan\alpha$

$$y_0 = -\frac{10}{2.100^2 \cos^2 30°}.800^2 + 800.\tan 30 = 35{,}2\,m$$

y_0 est supérieure à la hauteur H ; le projectile passe au-dessus de l'oiseau ; l'oiseau ne sera pas atteint par ce projectile.

3.6. .

3.6.1. Expression de la portée en fonction de V_0, g et α :
Soit P le point d'impact au sol : $y_P = 0$

$$\Rightarrow -\frac{g}{2.V_0^2 \cos^2\alpha}.x_P^2 + x_P.\tan\alpha = 0 \Rightarrow x_P = \frac{2.V_0^2 \cos^2\alpha.\tan\alpha}{g} \Rightarrow x_P = \frac{2.V_0^2 \cos^2\alpha.\sin\alpha}{g.\cos\alpha} = \frac{2.V_0^2 \cos\alpha.\sin\alpha}{g}$$

$$x_P = \frac{2.V_0^2 \cos\alpha.\sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g} \qquad x_P = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

3.6.2. Calcul de la portée maximale : $x_P = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ est maximale si sin(2α)=1

$$\Rightarrow x_{P\max} = \frac{V_0^2}{g}\ A.N : x_{P\max} = \frac{100^2}{10} = 1000\,m \qquad D = x_{P\max} = 1km$$

3.6.3. Rayon du champ de tir : $r = 1{,}1D = 1{,}1\,km$

Exercice10

3.1 : **(0,5 pt)**

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{50.10^{-2}}{9,8}} = 1,42s$

La longueur du fil pour que le pendule "batte la seconde"

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \longrightarrow \ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{2^2 \times 9,8}{4\pi^2} \approx 1m$

3.2 :

3.2.1 : **(0,5 pt)**

Système matériel : la bille

Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le système entre M_0 et M.

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{T}}$ (1)

avec $W_{\vec{T}} = 0$ car $\vec{T}$ est perpendiculaire au déplacement et

$W_{\vec{P}} = mgh = mg\ell(sin\theta - sin\theta_0)$

(1) $\longrightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(sin\theta - sin\theta_0)}$

3.2.2 : **(0,75 pt)**

Système matériel : la bille

Referentiel : Terrestre

Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$

Théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ (2)

Repère de Frenet

Projection de (2) sur l'axe normal donne T - P$sin\theta$ = ma_n $\longrightarrow$ T = P$sin\theta$ + ma_n

soit $T = mgsin\theta + m\frac{v^2}{\ell} = mgsin\theta + \frac{m}{\ell}(v_0^2 + 2g\ell(sin\theta - sin\theta_0))$

d'où $T = \frac{mv_0^2}{\ell} + mg(3sin\theta - 2sin\theta_0)$

3.2.3 : **(0,5 pt)**

Pour effectuer un tour complet T $\geq$ 0 lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2}$

soit $\frac{mv_0^2}{\ell} + mg(3sin\frac{3\pi}{2} - 2sin\theta_0) \geq 0$

$\longrightarrow \frac{mv_0^2}{\ell} \geq mg(3 + 2sin\theta_0) \longrightarrow v_0^2 \geq g\ell(3 + 2sin\theta_0)$

donc $v_{0m} = \sqrt{g\ell(3+2sin\theta_0)} = \sqrt{9,8\times 0,5(3+2sin15)} = 4,15m/s$

3.2.4 :

3.2.4.1 : **(0,5 pt)**

$$\vec{v}_A \begin{cases} direction : tangentelatrajectoireaupointA \\ sensverslebas \\ intensit : v_A = \sqrt{4,15^2 + 2\times 9,8\times 0,5(sin45 - sin15)} = 4,65m.s^{-1} \end{cases}$$

3.2.4.2 : **(0,75 pt)**

Théorème du centre d'inertie sur la bille : $\vec{P} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projection de cette relation sur les axes donne :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_x = -v_A sin\alpha \\ v_y = gt + v_A cos\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -v_A t sin\alpha + \ell cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + v_A t cos\alpha + \ell sin\alpha \end{cases}$$

3.2.4.3 : **(0,5 pt)**

$u = \ell cos\alpha - x \longrightarrow x = \ell cos\alpha - u$ aussi $x = -v_A t sin\alpha + \ell cos\alpha$

soit $-v_A t sin\alpha + \ell cos\alpha = \ell cos\alpha - u \longrightarrow u = v_A t sin\alpha$

et on tire $t = \dfrac{u}{v_A sin\alpha}$

On remplace t par sa valeur dans l'équation $y = \frac{1}{2}gt^2 + v_A t cos\alpha + \ell sin\alpha$ pour obtenir

$y = \dfrac{g}{2v_A^2 sin^2\alpha}u^2 + \dfrac{u}{tan\alpha} + \ell sin\alpha$

3.2.4.4 : **(0,5 pt)**

Pour y = 1,5 m on tire les valeur de u par résolution de l'équation du second degré soient :

$u_1 = -3,05$ et $u_2 = 0,839$

d'où l'on tire les valeurs de x soient :

$x_1 = 3,40m$ et $x_2 = 0,297m$

$x_1 > \ell cos\alpha$ est impossible donc la solution est $x_2 = 0,297m$

EXERCICE 11

3.1 :

3.1.1 :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = v_0 t cos\alpha \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t sin\alpha + h_1 \end{cases}$$

$z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 cos^2\alpha} + x tan\alpha + h_1 = -\frac{1}{2} 10 \frac{x^2}{8^2 cos^2 45} + x + 1,5$

$z = -0,156 x^2 + x + 1,5$

3.1.2 :

$x = \ell = 1,6$ m $\rightarrow z_\ell = -0,156(1,6)^2 + 1,6 + 1,5 = 2,7$ m

Or $h_2 = 2$ m et $z_\ell > h_2$ donc le ballon passe au dessus de la corde.

3.1.3 :

$z = 0 \rightarrow -0{,}156\,x^2 + x + 1{,}5 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 1{,}5 \times 0{,}156 = 1{,}94$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1{,}94}}{-2 \times 0{,}156} = 7{,}7\ \text{m}$

La distance qui sépare le solide de la ligne d'arrivée lorsqu'il touche l'eau est : L – x = 20 – 7,7 = 12,3 m

3.1.4 :

On applique le théorème de l'énergie cinétique au solide entre l'instant initial et l'instant où il touche l'eau :

$\dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = mgh_1 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_1 + v_0^2} = \sqrt{2 \times 10 \times 1{,}5 + 64} = 9{,}7\ \text{m.s}^{-1}$

$\sin\beta = \dfrac{v_0\cos\alpha}{v_2} = \dfrac{8 \times \cos 45}{9{,}7} = 0{,}58 \rightarrow \beta = 35{,}7°$

3.2 :

$x_3 = 12\ \text{m} \rightarrow z_3 = 0$

$$-\frac{1}{2}g\frac{x_2^3}{v_2^0\cos^2\alpha} + x_3\tan\alpha + h_1 = 0 \rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gx_2^3}{2(x_3\tan\alpha + h_1)}} = 10{,}3\ \text{m.s}^{-1}$$