EXERCICE 1

On donne :Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg ; Rayon de la Terre : $R_T = 6370$ km.
Masse du satellite : m = 650 kg ; Constante de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.

SPOT est un satellite de télédétection. Il évolue à l'altitude h = 832 km sur une trajectoire circulaire contenue dans un plan passant par l'axe des pôles de la Terre. Un tel satellite est appelé satellite à défilement.

3.1 Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Donner alors l'expression de sa vitesse V en fonction de G, M_T, R_T et h. Faire l'application numérique.

3.2 Etablir l'expression de la période de révolution du satellite SPOT en fonction de G, M_T, R_T et h.

3.3 Calculer l'angle de rotation de la Terre pendant une révolution du satellite. Pourquoi dit-on qu'un tel satellite est un satellite à défilement ?

3.4 Dans le champ de gravitation terrestre l'énergie potentielle du satellite est donnée par :

$$E_p = -\frac{GM_Tm}{r} \quad \text{avec} \quad r = R_T + h.$$

3.4.1 Où a-t-on choisi la référence de l'énergie potentielle de gravitation ? Justifier la réponse.

3.4.2 Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de G, M_T, m, R_T et h puis en fonction de m et V, vitesse du satellite.

3.4.3 Calculer l'énergie mécanique du satellite à l'altitude h.

EXERCICE 2

Uranus est la 7e planète du système solaire. Elle a été découverte en 1781 par William Herechelle. Elle fut mieux connue par l'homme grâce à son survol, en 1986, par la sonde Voyager II. Uranus met 84 ans pour faire un tour complet autour du soleil. Les cinq plus gros satellites de la planète Uranus ont été découverts grâce aux observations depuis la Terre entre 1787 et 1948. Il s'agit de : Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron.

Le tableau qui suit précise le rayon de la trajectoire de l'orbite décrite par chaque satellite autour d'Uranus et la période de révolution (durée d'un tour autour d'Uranus) :

Satellite	Rayon de l'orbite r (10^6m)	Période de révolution T (jour)
MIRANDA	129,8	1,4
ARIEL	191,2	2,52
UMBRIEL	266,0	4,14
TITANIA	435,8	8,71
OBERON	582,6	13,50

Dans tout le problème, on suppose que la répartition de masse des astres est à symétrie sphérique. Les mouvements des différents satellites d'Uranus sont étudiés dans le référentiel « Uranocentrique » supposé galiléen. On donne : $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI. On prendra 1 jour = 86400 s.

3.1 On se propose de déterminer la vitesse d'un satellite d'Uranus. On admet que le centre d'inertie du satellite effectue un mouvement circulaire dans le référentiel « Uranocentrique ».

3.1.1 Rappeler la définition d'un référentiel géocentrique. Définir, par analogie, le référentiel « Uranocentrique ». **(0,50 pt)**

3.1.2 Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. **(0,75 pt)**

3.1.3 Etablir l'expression de la vitesse V du centre d'inertie du satellite en fonction du rayon r de sa trajectoire et de sa période T de révolution. **(0,25 pt)**

3.1.4 Faire l'application numérique pour le satellite Umbriel. **(0,25 pt)**

3.2 Dans la suite, on cherche à déterminer la masse M d'Uranus par deux méthodes.

3.2.1 Méthode graphique.

La courbe de la fonction $V^2 = f(\frac{1}{r})$ où V est la vitesse du satellite dans le référentiel « Uranocentrique » et r le rayon de l'orbite autour d'Uranus est représentée à la page 4.

a) Etablir l'expression de la vitesse V en fonction de G , M et r. **(0,25 pt)**

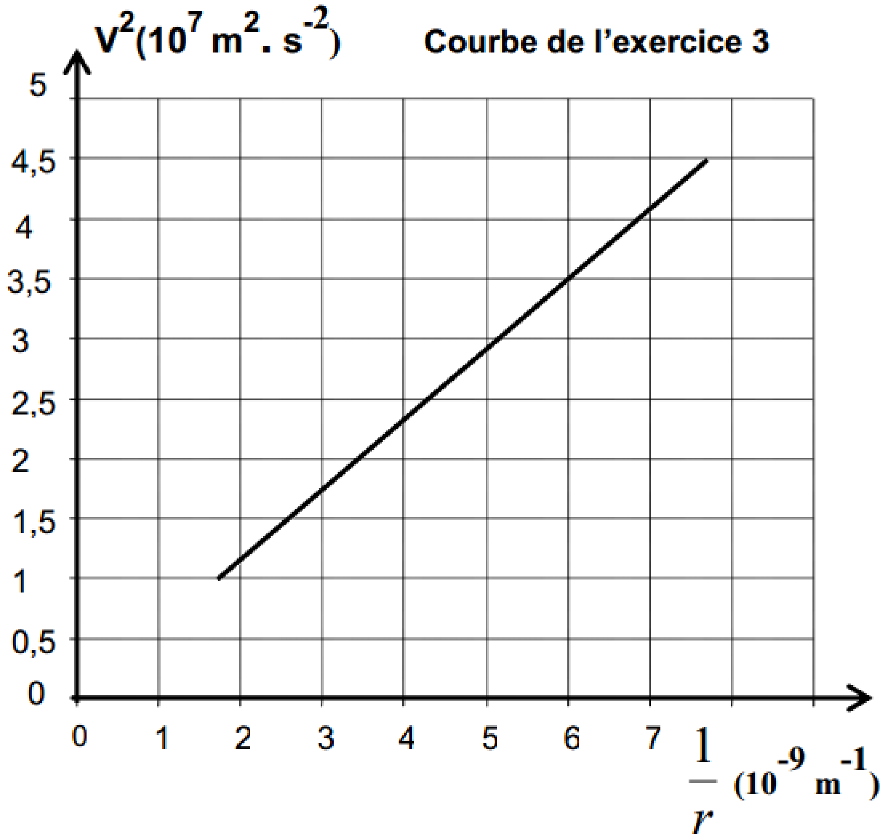
b) En vous aidant de la courbe, déterminer la masse d'Uranus (il n'est pas demandé de rendre la courbe avec la copie ; on expliquera seulement le mode d'exploitation). **(0,50 pt)**

3.2.2 Utilisation de la troisième loi de Kepler

a) Etablir la 3e loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ **(0,50 pt)**

b) En utilisant les informations données sur les satellites, montrer, aux erreurs d'expériences près, que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante dont on donnera la valeur numérique. **(0,50pt)**

c) En déduire la masse d'Uranus et comparer le résultat avec celui obtenu par la méthode graphique. **(0,50 pt)**



EXERCICE 3 **(03,5 points)**

Données : Constante de gravitation G = 6,6710^{-11} S.I, masse de la Terre M = 6.10^{24} kg,
Rayon de la terre R = 6400 km, distance Terre-Soleil d = 1,5.10^{8} km.

3.1 Deux corps ponctuels A et B, de masses respectives m et m', séparés par une distance d, s'attirent selon la loi de la gravitation universelle.
Rappeler l'expression de l'intensité des forces d'interaction gravitationnelle, s'exerçant entre les corps A et B. **(0,25 pt)**

3.2 Dans l'espace, le soleil, la Terre et autres astres, peuvent être considérés comme des corps ponctuels.
Le Soleil exerce sur la Terre une force de gravitation d'intensité F = 3,5.10^{22} N.
Déterminer la valeur de la masse du Soleil. **(0,5 pt)**

3.3 Dans le champ de gravitation, un satellite de la Terre, en mouvement dans le plan de l'équateur, y effectue un mouvement circulaire uniforme à l'altitude h_1 = 400 km.

3.3.1 Préciser le référentiel d'étude du mouvement de ce satellite. **(0,25 pt)**

3.3.2 Exprimer la vitesse linéaire V de ce satellite, puis calculer sa valeur. **(0,5 pt)**

3.3.3 Etablir les expressions littérales de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite dans ce même repère. Faire l'application numérique. **(01 pt)**

3.4 Entre autres conditions, un satellite de la Terre est géostationnaire si la période de son mouvement vaut 86.400 s. Justifier cette valeur de la période. **(0,25 pt)**

3.5 Exprimer puis calculer l'altitude h d'un satellite géostationnaire. **(0,75pt)**

EXERCICE 4

Les satellites géostationnaires sont utilisés, entre autres, en télécommunication, en météorologie et dans le domaine militaire. Ils ont pour rôle de recevoir et de réémettre, vers une zone couvrant une partie de la surface terrestre, des signaux électromagnétiques.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le mouvement circulaire d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et de déterminer la fraction de la surface terrestre couverte par le faisceau électromagnétique envoyé par un tel satellite.

3.1. Enoncer la loi de gravitation universelle puis donner, schéma à l'appui, sa formulation vectorielle. **(0,5 pt)**

3.2. En déduire l'expression vectorielle du champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}$ à l'altitude h. Etablir alors l'expression de $\mathcal{G}$ en fonction de sa valeur $\mathcal{G}_0$ au sol, de l'altitude h et du rayon R de la Terre. **(0,5 pt)**

3.3. Montrer que le mouvement du satellite géostationnaire est uniforme. **(0,5 pt)**

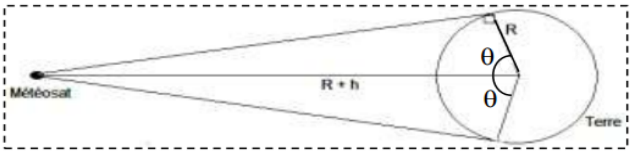
3.4. Etablir, en fonction de $\mathcal{G}_0$, R et h, l'expression de la vitesse v du satellite sur son orbite et celle de sa période T. **(0,5 pt)**

3.5. a) Qu'appelle–t–on satellite géostationnaire ? **(0,25 pt)**
b) Montrer, par un calcul, que l'altitude du satellite géostationnaire vaut $h = 3{,}58.10^4$ km.

3-6 Météosat-8 est un de ces satellites géostationnaires.

3-6-1 Calculer la fraction de la surface terrestre couverte par le faisceau électromagnétique envoyé par Météosat-8. **(0,5 pt)**

3-6-2 Dire si les observations faites par Météosat-8 concernent toujours la même zone de la Terre ou non. **(0,25 pt).**



On donne :
- La surface S de la calotte sphérique de rayon R, vue sous l'angle 2Θ depuis le centre de la Terre est donnée par : $S = 2\pi R^2 (1 - \cos\Theta)$.
- Rayon terrestre R= 6400 km; période de rotation de la Terre sur elle-même $T_t = 8{,}6.10^4$ s
- Valeur du champ de gravitation terrestre au sol : $\mathcal{G}_0 = 9{,}8$ S.I

Exercice 5 :

Dans le référentiel géocentrique un satellite évolue sur une orbite circulaire de rayon r_1 = 20 000 km dans le plan équatorial de la Terre. Il se déplace d'Ouest en Est. La période du mouvement de rotation de la Terre dans ce référentiel est T_0 = 86 164 s.

1) Montrer que le mouvement de rotation du satellite est uniforme.

2) Etablir l'expression de la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique puis calculer sa valeur.

3) En déduire l'expression de la période T_1 du mouvement du satellite puis calculer sa valeur.

4) Déterminer la valeur r de l'orbite du satellite pour qu'il soit géostationnaire.

5) Quelle est pour un observateur terrestre, la période de révolution T_a du satellite évoluant sur l'orbite circulaire de rayon r_1 = 20 000 km.

6) Un autre satellite, de période T_2 évoluant dans le plan équatorial de la Terre sur une orbite circulaire de rayon r_2 = 18 000 km dans le même sens que le premier.
A l'aide d'un schéma clair indiquer les positions des deux satellites quand leur distance est minimale.
Ce rapprochement entre les deux satellites se répète périodiquement. Calculer la période θ de ces rapprochements.

CORECTION DE LA SERIE DE GRAVITATION UNIVERSELLE

EXERCICE 2 **(04 points)**

3.1

3.1.1 Un référentiel géocentrique a pour origine le centre de la terre et comprend trois axes orientés vers trois étoiles lointaines. Par analogie le référentiel « Uranocentrique » a pour origine le centre d'Uranus et comprend trois axes orientés vers trois étoiles lointaines. **(0,50 pt)**

3.1.2

- Référentiel uranocentrique : galiléen
- Système : satellite
- Forces appliquées : force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}$

. - On applique la deuxième loi de Newton. $\vec{F} = m\vec{a}$

D'où l'on tire $\vec{a} = \dfrac{GM\,\vec{u}}{r^2}$ d'où $\vec{a}$ est centripète ; par conséquent $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = 0$

Impliquant que V = constante ; le mouvement est uniforme **(0,75 pt)**

3.1.3 T est la durée d'un tour ; d'où T = $\dfrac{2\pi r}{V}$ et V = $\dfrac{2\pi r}{T}$ Etablir l'expression de la vitesse V du centre d'inertie du satellite en fonction du rayon r de sa trajectoire et de sa période T de révolution. **(0,25 pt)**

3.1.4 On trouve pour le satellite Umbriel. **V = 4,7.10^2 m.s^{-1}.** **(0,25 pt)**

3.2 .

3.2.1 Méthode graphique.

a) a = a_n = $\dfrac{V^2}{r}$ = $\dfrac{GM}{r^2}$ d'où $V = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ **(0,25 pt)**

b) De l'expression précédente on tire : $V^2 = \dfrac{GM}{r}$ d'où V^2 est une fonction linéaire de $\dfrac{1}{r}$, ce qui en adéquation avec la courbe $V^2 = f(\dfrac{1}{r})$ donnée en annexe qui est une droite passant par l'origine et dont l'équation s'écrit : $V^2 = k.\dfrac{1}{r}$. La constante k est le coefficient directeur de la droite.

K = $\dfrac{\Delta(V^2)}{\Delta(1/r)}$ = $6{,}1.10^{15}$

Par identification on a : GM = k ; d'où M = $\dfrac{k}{G}$; AN : **M = 9. 10^{25} kg.** **(0,50 pt)**

3.2.2 Utilisation de la troisième loi de Kepler

a) On a T = $\dfrac{2\pi r}{V}$ et $V = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$; d'où l'on tire : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$ **(0,50 pt)**

b) On calcule $\dfrac{T^2}{r^3}$ pour les différents satellites. On obtient :

Satellite	Rayon de l'orbite r (10^6m)	Période de révolution T (jour)	$\dfrac{T^2}{r^3}$
MIRANDA	129,8	1,4	**6,7.10^{-15}**
ARIEL	191,2	2,52	**6,8.10^{-15}**
UMBRIEL	266,0	4,14	**6,8.10^{-15}**
TITANIA	435,8	8,71	**6,8.10^{-15}**
OBERON	582,6	13,50	**6,9.10^{-15}**

Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante de valeur moyenne **6,8.10^{-15}** **(0,50pt)**

<u>c)</u> On a $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ d'où l'on déduit **<u>M = 8,8.10^{25} kg</u>**. ; ce résultat est concordant à celui de la question b) du 3.2.1). **(0,50pt)**

Exercice 3 : (3,5 points)

<u>3.1 :</u> **(0,25 pt)**

Expression de l'intensité des forces d'interaction gravitationnelle s'exerçant entre les corps A et B :

$F = G\frac{m \times m'}{d^2}$

<u>3.2 :</u> **(0,5 pt)**

L'expression de l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle s'exerçant entre le Soleil et la Terre est : $F = G\frac{M_S \times M}{d^2}$ avec M_S est la masse du Soleil.

soit $\frac{M_S \times M}{d^2} = \frac{F}{G} \rightarrow M_S \times M = \frac{F \times d^2}{G} \rightarrow M_S = \frac{F \times d^2}{G \times M}$

Application numérique :

$M_S = \frac{3,5.10^{22} \times (1,5.10^{11})^2}{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}} = 1{,}97.10^{30}\ \text{kg} \approx 2{,}0.10^{30}\ \text{kg}$

<u>3.3 :</u>

Altitude du satellite : $h_1 = 400\ \text{km} = 4.10^5\ \text{m}$.

<u>3.3.1 :</u> **(0,25 pt)**

Le reférentiel géocentrique est le reférentiel d'étude du mouvement de ce satellite.

<u>3.3.2 :</u> **(0,5 pt)**

$V = \sqrt{\frac{G \times M}{R + h_1}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{(6400 + 400).10^3}} = 7{,}67.10^3\ \text{m/s}$

<u>3.3.3 :</u> **(1 pt)**

Expressions de la distance parcourue par le satellite pendant un tour :

$\ell = 2\pi(R + h_l)$ circonférence de la trajectoire

$\ell = V \times T$ distance parcourue par le satellite pendant une durée T (période) à la vitesse uniforme V.

Soit $V \times T = 2\pi(R + h_l) \to T = \dfrac{2\pi(R + h_l)}{V} = 2\pi(R + h_l)\sqrt{\dfrac{R + h_1}{G \times M}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R + h_1)^3}{G \times M}}$

Aussi V = (R + h_1) ω soit $\omega = \dfrac{V}{(R + h_1)} = \sqrt{\dfrac{G \times M}{R + h_1}} \times \dfrac{1}{R + h_1} = \sqrt{\dfrac{G \times M}{(R + h_1)^3}}$

Applications numériques :

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R + h_1)^3}{G \times M}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{((6400 + 400).10^3)^3}{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}} = 5562,35s$

$\omega = \sqrt{\dfrac{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{((6400 + 400).10^3)^3}} = 1,13.10^{-3} rad/s$

3.4 : **(0,25 pt)**

Un satellite géostationnaire est fixe par rapport à un point de la Terre. Sa période est égale à la période du mouvement de rotation de la Terre qui est 24 h = 24 × 3600 = 86400 s.

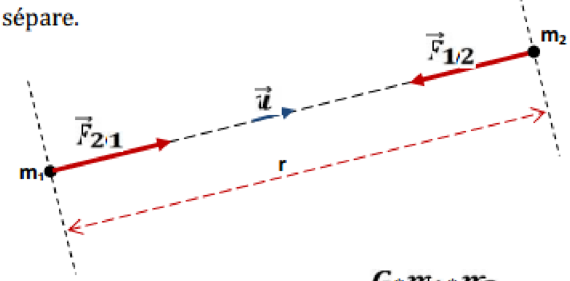
3.5 : **(0,75 pt)**

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R + h)^3}{G \times M}} \longrightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 GM}{4\pi^2}} - R$

Application numérique : $h = \sqrt[3]{\dfrac{86400^2 \times 6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{4\pi^2}} - 64.10^5 = 358,97.10^5 m \approx 36000 km$

EXERCICE 4

3.1 Enoncé de la loi de gravitation : deux corps ponctuels de masses respectives m_1 et m_2 distants de r exercent l'un sur l'autre des forces attractives directement opposées appelées forces d'interaction gravitationnelle dont l'intensité commune est proportionnelle aux masses et à l'inverse du carré de la distance r qui les sépare.



$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = -\frac{G * m_1 * m_2}{r^2} * \vec{u}$$

3.2 Expression du vecteur champ de gravitation : on a $\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{G \cdot M}{r^2} * \vec{u}$

Au sol $r = R$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \frac{G \cdot M}{R^2} \Rightarrow G * M = \mathcal{G}_0 . R^2$ d'où l'on tire $\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_0 R^2}{(R+h)^2}$.

3.3 Montrons que le mouvement du satellite est uniforme.

Système : le satellite ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces extérieures : $\vec{F} = m\vec{g}$ force gravitationnelle.

Théorème du centre d'inertie : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ or $\vec{g} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

donc V = cste ; le mouvement est uniforme.

3.4 Expression de la vitesse

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \frac{V^2}{R+h} = \frac{\mathcal{G}_0 R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}_0 R^2}{(R+h)}} \quad T = \frac{2\pi r}{V} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\mathcal{G}_0}}$$

3.5 a) Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît immobile par rapport à la Terre.

b) la période de rotation du satellite égale la période de la terre.

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\mathcal{G}_0}} = T_{terre} \Rightarrow \mathbf{h} = \sqrt[3]{\frac{T^2 \mathcal{G}_0 R^2}{4\pi^2}} - \mathbf{R}; \qquad \mathbf{AN} : \mathbf{h} = \mathbf{3{,}6.10^4 Km}$$

3.6.1 Fraction de surface couverte : $f = \frac{S(couverte)}{S(Terre)} = \frac{2\pi R^2(1-\cos\theta)}{4\pi R^2} = \frac{(1-\cos\theta)}{2}$

$$\cos\theta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow f = \frac{(1 - \frac{R}{R+h})}{2} = 0{,}42 = 42\%$$

3.6.2 Méteosat-8 est un satellite géostationnaire donc ses observations concernent toujours la même zone.